|  |  |
| --- | --- |
|  | D:\Dokumen Mocher\desktop\logo UMB.jpg |
|  | **MODUL PERKULIAHAN** |
|  |  |
|  | **LINGKARAN**   * + Persamaan fungsi   + Menentukan pusat lingkaran, jari-jari lingkaran   + Menentukan kedudukan titik terhadap lingkaran   + Menentukan persamaan elips, titik focus. |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |  |  | |  | |  |
|  | **Fakultas** | | **Program Studi** | **Tatap Muka** | **Kode MK** | | **Disusun Oleh** | |  |
|  | Ilmu Komputer | | Sistem Informasi | **10** | **87005** | | Drs. Sapto Prayogo. M.Kom | |  |
| **Abstract** | | | | **Kompetensi** | |
|  | | | |  | |
| Lingkaran tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tetap. Jarak yang sama itu disebut jari-jari dan titik tetap itu disebut pusat lingkaran. | | | | Mahasiswa mampu memahami masalah yang berkaitan dengan persamaan lingkaran dan meng gambarkannya dengan lengkap.  Dan mampu menentukan persamaan elips dan menggambarkannya dengan lengkap . | |

1. Persamaan Lingkaran

Definsi :

Lingkaran tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tetap. Jarak yang sama itu disebut jari-jari dan titik tetap itu disebut pusat lingkaran.

Persamaan lingkaran bila pusatnya di O(0,0) dan jari-jari:

1. r = 5 adalah x2 + y2 = 25
2. r = 2½ adalah x2 + y2 = 6¼
3. r = 1,1 adalah x2 + y2 = 1,21
4. r = √3 adalah x2 + y2 = 3

Contoh 1 :

Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat O(0,0) dan berjari-jari 12

Jawab :

r2=x2+y2

<=> x2+y2 = 122

<=> x2+y2 = 144

Contoh 2 :

Tentukan persamaan lingkaran melalui titik ( 7,-24) dengan pusat O(0,0)

Jawab :

Jari-jari lingkaran r =

r = = 25

Persamaan lingkaran dengan pusat O(0,0) dan melalui titik(7,-24) adalah

x2+y2 = 144

1. Persamaan lingkaran mellaui titik A(x,y)

Jika A(a,b) adalah pusat lingkaran dan B(x,y) titik yang terletak pada lingkaran,



maka jari-jari lingkaran r sama dengan jarak A ke B.

r2 = (AB)2

=(xb-xa)2 + (yb-ya)2

=(x –a )2 + (y-b)2

Persamaan lingkaran dengan pusat (a,b) dan berjari-jari r adalah :

(x –a )2 + (y-b)2 = r2

Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran jika diketahui :

Jawab :

Pusat (–2, 3), *r* = 5

Persamaan lingkaran: (*x* – (–2))2 + (*y* – 3)2 = 52

(*x* + 2)2 + (*y* – 3)2 = 25

*x*2 + 4*x* + 4 + *y*2 – 6*y* + 9 = 25

*x*2 + *y*2 + 4*x* – 6*y* + 13 = 25

*x*2 + *y*2 + 4*x* – 6*y* – 12 = 0

Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (5,2) dan melalui titik(-4,1)

Jawab :

Jari-jari lingkaran r2=(-4–5)2 + (1-2)2

r =

=

Persamaan lingkaran (x-5)2 + (y-2)2 =( )2

x2-10x +25+y2-4y+4 =( )2

x2+y2-10x-4y +29 = 82

x2+y2-10x-4y -53 = 0

1. Pusat dan Jari-jari Lingkaran

Berdasarkan persamaan lingkaran dengan pusat (*a*, *b*) dan berjari-jari *r* adalah:

(x – a)2 + (y – b)2 = r2

x2 – 2ax + a2 + y2 – 2by + b2 = r2

x2 + y2 – 2ax – 2by + a2 + b2 = r2

x2 + y2 – 2ax – 2by + a2 + b2 – r2 = 0

Jika –2*a* = 2*A*, –2*b* = 2*B* dan *a*2 + *b*2 – *r*2 = *C,* maka diperoleh :

Bentuk umum persamaan :

*x*2 + *y*2 – 2*Ax* – 2*By* + *C*= 0, dimana pusat lingkaran (-A,-B)

Jari – jari lingkaran :

r = atau r =

Contoh : 1

Tentukan pusat dan panjang jari lingkaran persamaan lingkaran

x2+y2 -2x-6y-15 =0

Jawab :

x2+y2 -2x-6y-15 =0 <=> ***x*2 + *y*2 – 2*Ax* – 2*By* + *C*= 0,**

maka diperoleh

2*A* = –2 2*B* = –6 *C* = –15

*A* = –1 *B* = –3

**r = =**

**r = = = 5**

Sehingga pusat lingkaran (1,3) dan jari-jari lingkaran =5

Contoh : 2

Tentukan pusat dan panjang jari-jari lingkaran

3*x*2 + 3*y*2 + 30*x* + 72 = 0

Jawab :

3*x*2 + 3*y*2 + 30*x* + 72 =0 <=> ***x*2 + *y*2 – 2*Ax* – 2*By* + *C*= 0,**

Maka diperoleh:

2*A* = 10, 2*B* = 0 , *C* = 24 <=> *A* = 5 ,*B* = 0, C=24

**r = = = = 1**

Sehingga pusat lingkaran (-5,0) dan jari-jari lingkaran =1

1. Kedudukan titik terhadap lingkaran
2. Posisi Titik *P*(*x*1, *y*1) terhadap Lingkaran *x*2 + *y*2 = *r*2 dapat terjadi dalam tiga

keadaan :

1. Titik *P*(*x*1, *y*1) terletak di dalam lingkaran, jika berlaku *x*12 + *y*12 < *r*2.
2. Titik *P*(*x*1, *y*1) terletak pada lingkaran, jika berlaku *x*12 + *y*12 = *r*2..
3. Titik *P*(*x*1, *y*1) terletak di luar lingkaran, jika berlaku *x*12 + *y*12 > *r*2.

**Contoh :**

Tentukan posisi titik(-3,4) terhadap lingkaran *x*2 + *y*2 = 25

**Jawab :**

(-3,4) => *x*2 + *y*2 =( -3)2+42=9+16

=25=25

Jadi titik(-3,4) teletak pada lingkaran

**Contoh :**

Tentukan posisi titik B(-3,4) terhadap lingkaran *x*2 + *y*2 = 25

**Jawab :**

*B*(–3, 4) --> *x*2 + *y*2 = (–3)2 + 42 = 9 + 16

= 25 = 25

Jadi *B*(–3, 4) terletak pada lingkaran *x*2 + *y*2 = 25

**Contoh :**

Tentukan posisi titik C(6,-5) terhadap lingkaran*x*2 + *y*2 = 25

**Jawab :**

*C*(5, –6) --> *x*2 + *y*2 = 52 + (–6)2 = 25 + 36

= 61 > 25

Jadi *C*(5, –6) terletak di luar lingkaran *x*2 + *y*2 = 25.

1. Posisi titik *P*(*x*1, *y*1) terhadap lingkaran (*x* – *a*)2 + (*y* – *b*)2 = *r*2 dapat terjadi

dalam tiga keadaan :

1) Titik *P*(*x*1, *y*1) terletak di dalam lingkaran, jika berlaku (*x* – *a*)2 + (*y* – *b*)2< *r*2

2) Titik *P*(*x*1, *y*1) terletak pada lingkaran, jika berlaku (*x* – *a*)2 + (*y* – *b*)2 = *r*2

3) Titik *P*(*x*1, *y*1) terletak di luar lingkaran, jika berlaku (*x* – *a*)2 + (*y* – *b*)2 > *r*2

Contoh :

Diketahui persamaan lingkaran x2 + y2 – 6x – 4y – 3 = 0 dan 3 titik, P (7, 5); Q (–1, 2); dan R (0, 4). Tentukan posisi titik tersebut terhadap lingkaran dan gambarkan posisi titik tersebut.

**Jawab :**

**Lingkaran :**

Lingkaran x2 + y2 – 6x – 4y – 3 = 0 ; A = –6, B = –4 dan C = –3

Pusat lingkaran (-1/2 A,-1/2B)=(-1/2( -6),-1/2(-4))=(3,2)

Jari – jari lingkaran R =

=

= 4

**Titik-titik.**

* + - * Substitusi P (7, 5) pada lingkaran, maka didapat :

72 + 52 – 6.7 – 4.5 – 3 = 49 + 25 – 42 – 20 – 3 = 9 > 0

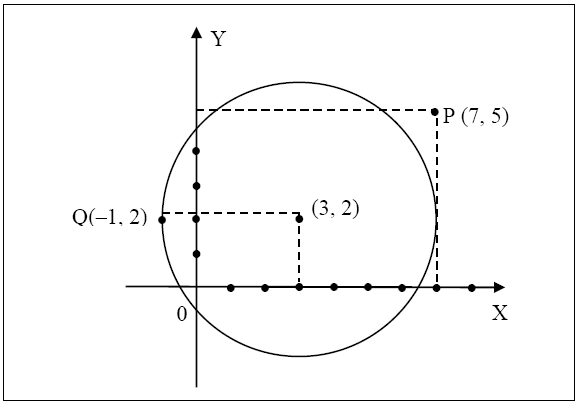
* + - * Substitusi Q (–1, 2) pada lingkaran, maka didapat :

(-1)2 + 22 – 6.(–1) – 4.2 – 3 = 1 + 4 + 6 – 8 – 3 = 0

* + - * Substitusi R (0, 4) pada lingkaran, maka didapat :

02 + 42 + 6.0 – 4.4. – 3 = 16 – 16 – 3 = –3 < 0

**Gambar.**

****

1. **Persamaan ellips**

Definisi :

Elips juga didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya terhadap suatu titik dan suatu garis yang diketahui besarnya tetap. ( e < 1 ). Titik itu disebut fokus dan garis tertentu itu disebut direktriks.

**X**

**O**

**A ( a , 0 )**

**F1 ( - c , 0 )**

**F1 ( c , 0 )**

**Y**

**P ( x , y )**

**D ( 0 , - b )**

**C ( 0 , b )**

**B ( a , 0 )**

Dari gambar diatas, titik F1 dan F2 dan adalah titik focus elips dan A, B, C, D adalah titik puncak elips. Elips mempunyai dua sumbu simetri, yaitu :

1. Garis yang memuat fokus dinamakan sumbu mayor. Pada gambar, sumbu mayor elips adalah AB.
2. Garis yang tegak lurus sumbu mayor di titik tengah disebut sumbu minor. Pada gambar , sumbu minor elips adalah CD.

Sedangkan titik potong kedua sumbu elips itu disebut pusat elips.

Gambar diatas menunjukkan sebuah elips dengan :

* Pusat elips O(0,0) ;
* Sumbu simetri adalah sumbu x dan sumbu y ;
* Fokus F1 (-c,0) dan F2 (c,0) ;
* Sumbu mayor pada sumbu x, puncak A(-a,0) dan B(a,0) , panjang sumbu mayor = 2a
* Sumbu minor pada sumbu y, puncak C(0,b) dan D(0,-b) , panjang sumbu minor = 2b
* Eksentrisitas : 
* Direktriks :  atau 

Panjang lactus rectum 

**Persamaan Elips**

1. **Persamaan elips yang berpusat di O(0,0)**

Selain diketahui pusat elipsnya, persamaan elips juga ditentukan dari titik fokusnya.

* 1. **Untuk elips yang berfokus pada sumbu x, persamaan elipsnya adalah**



Dengan :

- Pusat (0,0)

- Fokus F1 (-c,0) dan F2 (c,0)

* 1. **Untuk elips yang berfokus pada sumbu y, persamaan elipsnya adalah**



Dengan :

- Pusat (0,0)

- Fokus F1 (0,-c) dan F2 (0,c)

**Catatan** : ****

**Contoh 1**

Tentukan persamaan elips yang berpusat di O(0,0), fokus (-4,0) dan (4,0) dengan sumbu mayor 10 satuan.

**Jawab** :

Fokus di F1 (-4,0) dan F2 (4,0) maka c = 4 ( fokus pada sumbu x )

Panjang sumbu mayor = 10, maka 2a = 10. Sehingga a = 5



Persamaan elipsnya :



Jadi persamaan elipnya adalah 

**Contoh 2**

Diketahui persamaan elips , tentukan koordinat titik puncak, koordinat titik fokus, panjang sumbu mayor, sumbu minor, eksentrisitas, persamaan direktriks dan panjang lactus rectum !

**Jawab** :

Dari persamaan elips , diperoleh a2 = 16, maka a = 4; b2 = 9, maka b = 3.

c2 = a2 - b2 , sehingga c2 = 16 – 9 =7, maka c = .

Dari data diatas diperoleh :

* Titik puncak (a,0) = (4,0) dan (-a,0)=(-4,0)
* Titik focus ( -c,0) = (-,0 ) dan ( c,0)=( ,0 )
* Panjang sumbu mayor = 2a = 2. 4 = 8
* Panjang sumbu minor = 2b = 2. 3 = 6
* Eksentrisitas: = 
* Persamaan direktriks : 
* Panjang lactus rectum = 

1. Persamaan elips yang berpusat di P(α,β)
   1. **Elips yang berfokus pada sumbu utama yang terletak pada / sejajar sumbu x, persamaan elipsnya adalah**

****

Dengan :

* Pusat (α,β)
* Titik fokus di F1 (α-c, β) & F2(α+c, β)
* Titik puncak (α-a, β) & (α+a, β)
* Panjang sumbu mayor=2a
* Panjang sumbu minor=2b
* Persamaan direktriks 
  1. **Elips yang berfokus pada sumbu utama yang terletak (α,β)**

****

Dengan :

* Pusat (α,β)
* Titik fokus di F1 (α,β-c) & F2(α,β+c)
* Titik puncak (α,β-a) & (α,β+a)
* Panjang sumbu mayor=2a
* Panjang sumbu minor=2b
* Persamaan direktriks 

**Contoh 1**

Tentukan titik pusat, titik fokus, titik puncak, panjang sumbu mayor dan sumbu minor dari persamaan elips 

**Jawab :**

Nyatakan terlebih dahulu persamaan elips tersebut ke dalam bentuk baku

* + - ****
    - 
    - 
    - 
    - 
    - 
    - 
    - 
    - 
    - ****

Dari persamaan diatas diperoleh : α=2, β=1, a2=9 maka a=3, b2=4 maka a=2, ****

* + - Pusat ( α,β )= ( 2,1 )
    - Titik fokus di F1 ( α-c, β )= ( 2 -,1 ) & F2 ( α+c, β )=( 2+,1 )
    - Titik puncak ( α-a, β )=( 2-3,1 ) =( -1,1 ) & ( α+a, β )= ( 2+3,1 )=( 5,1 )
    - Panjang sumbu mayor=2a=2.3=6
    - Panjang sumbu minor=2b=2.2=4

Soal :

1. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat(2,4) dan jari-jari=3
2. Tentukan pusat dan panjang jari-jari persamaan lingkaran

*x*2 + *y*2 – 4*x* – 6*y* – 12 = 0

1. Diketahui persamaan lingkaran *x*2 + *y*2 – 4*x* – 10*y* = 0, jika pusat lingkaran (2, *a*), maka tentukan nilai *a* persamaan tersebut.
2. Tentukan posisi titik a(8,-2) terhadap lingkaran *x*2 + *y*2 + 2*x* – 4*y* – 60 = 0
3. Tentuka nilai p persamaanlingkaran (*x* + 4)2 + (*y* – *p*)2 = 13 , jika diketahui titik *A*(–2, –1) berada di dalam lingkaran.
4. Diketahui persamaan ellips 4x2 + 9y2 +16x - 18y - 11 = 0. Tentukan
5. Pusat ellips
6. Panjang sumbu mayor
7. Panjang sumbu minor.

Daftar pustaka :

1. Cipta Science Team. 1997. *Rangkuman Matematika Untuk Siswa SMU*. Yustadi, Indonesia
2. Idel, A dan Hariyono, R. *Pintar Matematika SMU*. Gitamedia Press, Surabaya
3. Palouras, J.D. dan Gunawan, W. 1987. *Peubah kompleks untuk Ilmuan dan Insinyur*. Erlangga. Jakarta
4. Stroud, K.A. dan Edwin, S. 1989. *Matematika Untuk Teknik.* Ed. Ke-3. Erlangga Jakarta.
5. Tampomas, H. 1999 *Seribu Pena Matematika SMU Kelas 3.* Erlangga, Jakarta

# Daftar Pustaka

1. Cipta Science Team. 1997. *Rangkuman Matematika Untuk Siswa SMU*. Yustadi, Indonesia
2. Palouras, J.D. dan Gunawan, W. 1987. *Peubah kompleks untuk Ilmuan dan Insinyur*. Erlangga. Jakarta
3. Stroud, K.A. dan Edwin, S. 1989. *Matematika Untuk Teknik.* Ed. Ke-3. Erlangga Jakarta.
4. Tampomas, H. 1999 *Seribu Pena Matematika SMU Kelas 3.* Erlangga, Jakarta